

§21. 完交環

< 完交環とは？ >

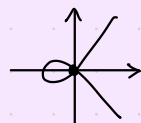
◎ 最重要定理 (これが定義とされることもある) : 外在的特徴づけ

Thm. 21.2 iii) A : Noether 局所環

A が完交環 $\Leftrightarrow \hat{A} =$ 完備正則局所環 / (正則列)

代数

幾何



$k[x,y]/(y^2-x^2-x^3)_{(x,y)}$

● 完備化

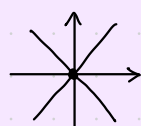
... 「局所的に見ると」

正則局所環

... 「なめらか」

正則列

... 「独立な」元



↓ 完備化

$k[[x,y]]/(y^2-x^2)$

(正則列) (行316)

... 「横断的な」超曲面の交叉

さらに, CM loc. では

◦ $\dim(R/I) + \text{ht } I = \dim R$

◦ $a_1, \dots, a_r$ が正則列 $\Leftrightarrow \text{ht}(a_1, \dots, a_r) = r$ (Thm. 17.4) より

Cor.

A : Noether 局所環

A が完交環 $\Leftrightarrow \hat{A} =$ 完備正則局所環 / (codim個の元)

$\dim R \exists R$: 完備正則局所環

codim $\downarrow$ / (codim個で生成された行316)

$\dim A \hat{A}$

「こうして生成元の個数だけ次元が落ちている」という意味で「独立」「横断的」

● 完交環

... 「局所的に見ると, なめらかな空間内の (余次元)個の超曲面の交叉」

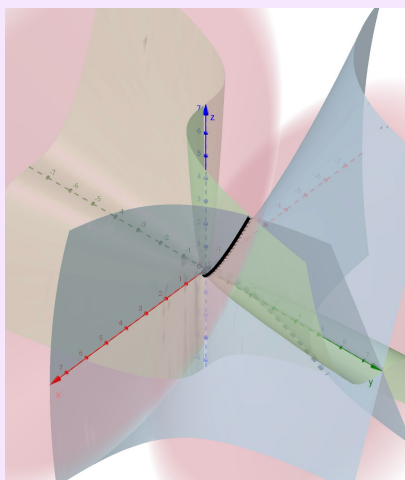
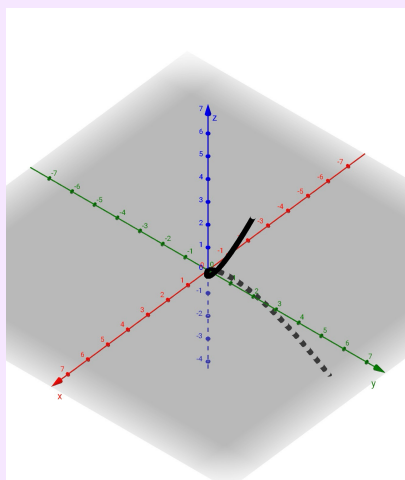
Rmk. 全ての完備 Noether 局所環は ある完備正則局所環の商 (Cohenの構造定理)

よって必ず $\hat{A} = R/a$ とは書けて, a が「良い」のが 完交環.

完備を外すと属.

codim個で生成

[例] $\{(t^3, t^4, t^5)\} = \{\underline{y^2=xz}, \underline{x^2=yz}, \underline{z^2=x^2y}\}$ の原点での局所環



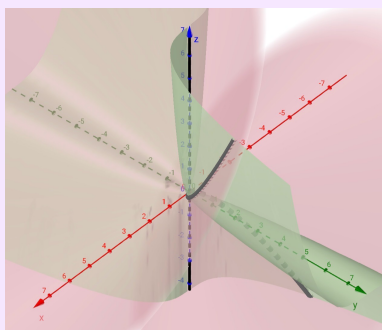
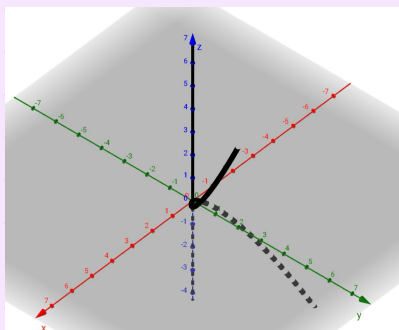
余次元2なので
3曲面の交叉.

i.e. 高々2なので
3元生成.

(2元では生成できない:
(cf. Ha. Chap. I Ex. 1.11))

→ 完交でない.

原点以外での局所環は完交 (実はより強く、正則). なぜか?



原点以外では、
“局所的には”
2曲面の交叉として
書けるため.

(例終り)

その他 (包含関係, 継承性, 大域化)

◦ $CM \stackrel{21.3}{\neq} \text{Gorenstein} \supsetneq \text{完交環} \supsetneq \text{正則局所環}.$

◦ $A: \text{完交} \stackrel{21.2}{\iff} \hat{A}: \text{完交}.$

◦ $A: \text{完交} \implies A_p: \text{完交}.$

◦ $A: \text{局所完全交叉} \stackrel{\text{def}}{\iff} \forall_p, A_p: \text{完交}$

} 今回 1-274

★ 完交環 を 内在的に 定義する. (A, m, k) : Noether 局所環.

Koszul 複体のホモロジーの次元.

$$\varepsilon_p(A) := \dim_k H_p(K_*(x_1, \dots, x_n)) \quad (x_1, \dots, x_n \text{ は } m \text{ の極小生成}) \text{ とおき.}$$

Def. A が 完交環 (C.I.) $\stackrel{\text{def}}{\iff} \varepsilon_1(A) = \text{em.dim } A - \dim A$

確認すべきこと:

① ε_p は極小生成の取り方によらない. (i.e. A の不変量である)

(② $x'_1, \dots, x'_n$ が別の極小生成だったとすると, “変換行列” (a_{ij}) があり
 $x'_i = \sum_j a_{ij} x_j$ なる可逆行列がある (cf. Thm. 2.3).
 $K_*(x'_1, \dots, x'_n) \rightarrow K_*(x_1, \dots, x_n) \ni e'_i \mapsto \sum_j a_{ij} e_j$ で変わると.
これは微分と可換で, 各次数に同型を誘導するので, 複体の同型.)

② $m H_p(K_*(x_1, \dots, x_n)) = 0$ (i.e. $H_p(K_*(x_1, \dots, x_n))$ は k -Vect.)

(cf. Thm. 16.5 直前)

Recall $\circ \text{em.dim}(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k m/m^2$

$\circ$ 常に $\text{em.dim } A \geq \dim A$.

$=$ のことを正則性というのだ.

Prop. A : 正則 $\iff \varepsilon_1(A) = 0$.

① $\circ A$: 正則 なら, より極小生成は正則基底であり,

従って Koszul 複体のホモロジーは消える. $\leadsto \varepsilon_1(A) = 0$

$\circ \varepsilon_1(A) = 0$ なら Thm. 16.5 (ii) より極小生成は基底なので A : 正則.

Cor. A : 正則 $\Rightarrow A$: 完交.

☆ 正則局所環の剰余環の一般論

$$(R, \mathfrak{m}): \text{正則局所環} \quad \text{em.dim } R = \dim R$$

$$\downarrow / \mathfrak{a}$$

$$(A, \mathfrak{m}) = R/\mathfrak{a}$$

$$\text{VI} \quad \text{VI}$$

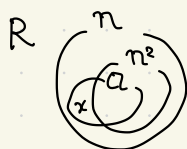
$$\text{em.dim } A \geq \dim A$$

reduction ☆ ここがイコールであることは $\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^2$ と同値であり.

そうなるように正則局所環 R を取ることもできる.

① $\mathfrak{a} \not\subseteq \mathfrak{m}^2$ ならば. $x \in \mathfrak{a} - \mathfrak{m}^2$ を取る.

$$\begin{array}{ccc} (R, \mathfrak{m}) & & \dim R \geq 1 \\ \downarrow / \mathfrak{a} & \searrow & \\ (R/\mathfrak{a}, \mathfrak{m}/\mathfrak{a}) & \dim R/\mathfrak{a} & \\ \downarrow / \mathfrak{a} & \swarrow & \\ (A, \mathfrak{m}) & \text{と經由し.} & \end{array}$$



$0 \neq \bar{x} \in \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ かつ正則元なので. $\dim R/\mathfrak{a} \neq \dim R$ から 1 下がる.

$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{m}^2$ ならば. $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 = (\mathfrak{m}/\mathfrak{a})/(\mathfrak{m}^2/\mathfrak{a}) = \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ かつ em.dim. は等しい.

構成も含め、一般論として超重率の reduction,

$$\begin{array}{ccc}
 (R, \mathfrak{m}): \text{正則局所環} & \text{em.dim } R = \dim R =: n & \\
 \downarrow /a & \parallel & \forall \quad (a \in \mathfrak{m}^2) \\
 (A, \mathfrak{m}) = R/a & \text{em.dim } A \geq \dim A &
 \end{array}$$

① 極小値: $\xi_1, \dots, \xi_n \xrightarrow[\text{②}]{2.3} \bar{\xi}_1, \dots, \bar{\xi}_n$: 基底
 $\mathfrak{m}$ 取? ①

$$\begin{array}{ccc}
 \downarrow \swarrow & n \rightarrow n/\mathfrak{m}^2 & \downarrow \searrow \\
 \downarrow \swarrow & \downarrow & \downarrow \searrow \\
 \downarrow \swarrow & \mathfrak{m} \rightarrow \mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2 & \downarrow \searrow
 \end{array}$$

$/a$ $\downarrow$ $\mathfrak{m}$ $\rightarrow$ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ $\downarrow$ $\mathfrak{m}$ $\rightarrow$ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$ $\downarrow$ $\mathfrak{m}$ $\rightarrow$ $\mathfrak{m}/\mathfrak{m}^2$

③ iso. as k -Vect

極小値: $x_1, \dots, x_n \xrightarrow[\text{④}]{2.3} \bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n$: 基底
 となる.

② $K.(\xi_1, \dots, \xi_n) \xrightarrow[\text{qis.}]{} k$: proj. resol.

$\otimes_R A = /a$ } : 極小値は正則基底.

$K.(x_1, \dots, x_n)$: 極小値の Koszul 複体

ホモロジ-を取る

$H_p(K.(x_1, \dots, x_n))$

$\leadsto H_p(K.(x_1, \dots, x_n)) = \text{Tor}_p^R(k, A)$

要するに
Torの計算を
してやる.

③ $0 \rightarrow a \rightarrow R \rightarrow A \rightarrow 0$

$0 = \text{Tor}_1^R(k, R) \rightarrow \text{Tor}_1^R(k, A)$

$\xrightarrow{\sim} k \otimes a \xrightarrow{\quad 0 \quad} k \otimes R \xrightarrow{\sim} k \otimes A \rightarrow 0$

$\text{Tor}_1^R(k, A)$
 $\parallel$
 $k \otimes_R a$

④ $\varepsilon_1(A) \stackrel{\text{def}}{=} \dim_k H_1(K.(x_1, \dots, x_n)) \stackrel{\text{②③}}{=} \dim_k k \otimes_R a = (a \text{ の生成元の最小個数})$
 $=: \mu(a).$

★数値的関係の一般論

$(A, m, k): \text{Noether 局所環}$

- Thm. 21.1
- i) $\varepsilon_p(A) = \varepsilon_p(\hat{A})$
 - ii) $\varepsilon_1(A) \geq \text{em-dim } A - \dim A$
 - iii) $A = R/\mathfrak{a} : \text{正則局所環の剰余}$ ならば

$$\mu(\mathfrak{a}) = \dim R - \text{em-dim } A + \varepsilon_1(\mathfrak{a})$$

Prf.

i) $\circ m$ の極小基底 $\hat{m} = m\hat{A}$ の極小基底をなす ($\because m/m^2 = \hat{m}/\hat{m}^2$ の基底)

$$\begin{aligned} & H_p(K.(x)) \otimes_A A/m = H_p(K.(x)) \otimes_A \hat{A} \otimes_A \hat{A}/\hat{m} \\ & = H_p(K.(x)) \otimes_A \hat{A} \otimes_A \hat{A}/\hat{m} \quad \hat{A}: \text{flat}/A. \\ & = H_p(K.(x)) \otimes_k k \quad \dim \text{を} \text{取} \text{れ} \text{ば} \text{よい}. \end{aligned}$$

ii) 完備化にて両辺は変わらないから $A: \text{完備}$ としてよい.

Cohenの構造定理 を認める. すなわち, A は $R/\mathfrak{a}$ ($R: \text{正則}$) とかける.

reduction ★ を行い,

$$\varepsilon_1(A) = \underbrace{\mu(\mathfrak{a})}_{\text{高度定理}} \geq \underbrace{\text{ht}(\mathfrak{a})}_{\text{17.4 CM.loc.}} = \dim R - \dim A = \text{em-dim } A - \dim A. \quad \star$$

iii) $\mathfrak{a} \neq \mathfrak{n}^2$ ならば, reduction ★ で $\mu(\mathfrak{a})$ も $\dim R$ も 1 減る.

$$\mathfrak{a} \subseteq \mathfrak{n}^2 \text{ ならば, } \underline{\mu(\mathfrak{a})} = \underline{\dim R - \text{em-dim } A} + \underline{\varepsilon_1(\mathfrak{a})} \quad \square \quad \star \text{ OK.}$$

$$\begin{array}{ccc} (R, \mathfrak{n}) & \text{em-dim } R = \dim R & \\ \downarrow / \mathfrak{a} & \downarrow \vee & \downarrow \vee \\ (A, \mathfrak{m}) & \text{em-dim } A & \geq \dim A \end{array}$$

$\varepsilon_1 \updownarrow$ $\downarrow \text{em-dim}$ $\uparrow \text{ht}(\mathfrak{a})$ $\uparrow \text{高度定理の} \mu(\mathfrak{a})$

$\left(\begin{array}{l} \updownarrow = 0 \\ \updownarrow = 0 \end{array} \right) \stackrel{\text{def}}{\iff} \text{正則} \\ \left(\begin{array}{l} \updownarrow = 0 \\ \updownarrow = 0 \end{array} \right) \iff \text{完全}$

$\varepsilon_1 = 0 \Rightarrow \text{em-dim} = 0$ は明らか. 実は $\text{em-dim} = 0 \Rightarrow \varepsilon_1 = 0$ も成立するのだ、た.

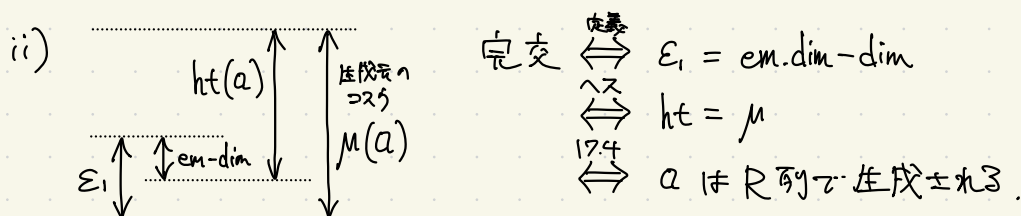
☆ 完交環の一般論

(A, m, k) : Noether 局所環.

Thm. 21.2

- i) A が 完交環 $\Leftrightarrow \hat{A}$ が 完交環
- ii) R : 正則局所環, $A = R/\mathfrak{a}$ なる A が 完交環 $\Leftrightarrow \mathfrak{a}$ は R 列で生成される
- iii) A が 完交環 $\Leftrightarrow \hat{A} = \text{完備正則局所環} / (\text{正則列})$

prf. i): 定義の両辺 $(\varepsilon_1, \text{em.dim}, \dim)$ は完備化で不変なので OK.



iii) $\Leftarrow$ は OK. $\Rightarrow$ は Cohen の構造定理より. (また?)

Thm. 21.3

完交 $\Rightarrow$ Gorenstein.

prf. A : 完交 $\xleftrightarrow{\text{上 iii)}} \hat{A} = R/\mathfrak{a} \Rightarrow \hat{A} = R/\mathfrak{a}$: 正則局所環 / 正則列

A : Gor. $\xleftrightarrow{\text{Ex. 18.1 (私の前の pdf 参照)}} \hat{A} = R/\mathfrak{a}$: Gor. 環 / 正則列

巴系行ったりの既約性で分かる. D.

< 正則列剰余 >

正則局所環
 $\cap$
 完交環 $\searrow$ 落ちる (21.2(ii))
 $\cap$
 Gor. 環 $\supset$ 閉じる (Ex. 18.1)
 $\cap$
 CM 環 $\supset$ 閉じる (Ex. 17.3(iii))